Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 7 Martie 2009

CLASA A XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie descrescătoare, astfel încât $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < 1$, oricare ar fi $x \geq 0$. Să se arate că:

(a) $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ există şi este finită;

(b) $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Soluţie. (a) Concluzia rezultă din faptul că funcţia $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, este crescătoare şi mărginită.

.... **3 puncte**

(b) Dacă $x > 0$, atunci $F(x) - F(x/2) = \int_{x/2}^x f(t)\mathrm{d}t \geq (x/2)f(x) \geq 0$. Cum $\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(x/2)) = 0$, rezultă că $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

.... **4 puncte**

Problema 2. Fie A un inel comutativ cu n elemente, $n \geq 2$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$;

(b) numărul funcţiilor polinomiale $\tilde{f} : A \to A$ este n^2.

Soluţie. Mai întâi arătăm că numărul funcţiilor polinomiale ale inelului A este cel puţin n^2.

Fie $f, g \in A[X]$, $f = aX + b$ şi $g = cX + d$. Dacă f şi g au aceeaşi funcţie polinomială, atunci $f(0) = g(0)$ şi $f(1) = g(1)$, de unde $b = d$ şi $a = c$, deci $f = g$. Întrucât există n^2 polinoame de grad cel mult 1, rezultă că există cel puţin n^2 funcţii polinomiale.

.... **3 puncte**

Arătăm că (a) implică (b). Fie $f = a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $k \geq 1$. Cum $\tilde{f}(x) = (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1)x + a_0 = ax + a_0$, oricare ar fi $x \in A$, rezultă că $\tilde{f} = \tilde{g}$, unde $g = aX + a_0$. Prin urmare, numărul funcţiilor polinomiale este exact n^2.

.... **2 puncte**

Pentru a demonstra implicaţia inversă, considerăm polinoamele $f = X^2$ şi $g = aX + b$, unde $\tilde{f} = \tilde{g}$. Rezultă că $x^2 = ax + b$, oricare ar fi $x \in A$. Pentru $x = 0$, obţinem $b = 0$; apoi, pentru $x = 1$, obţinem $a = 1$. Deci $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

.... **2 puncte**

Problema 3. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Să se arate că:

(a) funcţia $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, $H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, dacă $x \in (0,1]$, şi $H(0) = 0$, îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle pe intervalul $[0,1]$;

(b) există un punct $a \in (0,1)$ astfel încât $\displaystyle\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = af(a)$.

Soluţie. (a) Fie funcţiile derivabile $F, G : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ şi $G(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$. Rezultă $H(x) = G(x)/x - F(x)$, $0 < x \leq 1$. Întrucât $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = G'(0) - F(0) = 0$, rezultă că H este continuă în 0. Concluzia rezultă din faptul că $H(0) = H(1) = 0$ şi H este derivabilă pe $(0,1]$.

.... **2 puncte**

(b) Din teorema lui Rolle rezultă că există un punct $b \in (0,1)$, astfel încât $H'(b) = 0$. Întrucât

$$H'(x) = \frac{x^2 f(x) - G(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{G(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 1,$$

obţinem $G(b) = 0$.

.... **2 puncte**

Aplicând teorema lui Rolle funcţiei $K : [0,b] \to \mathbb{R}$, $K(x) = \mathrm{e}^{-x}G(x)$, rezultă că există un punct $a \in (0,b)$, astfel încât $K'(a) = 0$, i. e. $G(a) = G'(a)$.

. . . . **3 puncte**

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente şi $n \geq q$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine probabilitatea ca alegând un polinom din mulţimea polinoamelor de grad n din $K[X]$, acesta să nu aibă nicio rădăcină în K.

Soluţie. Fie f un polinom de grad n şi g restul împărţirii lui la polinomul $X^q - X$. Cum rădăcinile lui $X^q - X$ sunt toate elementele lui K, polinoamele din $K[X]$ de grad n, care au aceeaşi funcţie polinomială cu f, sunt cele de forma $(X^q - X)c + g$, unde gradul lui c este $n - q$, deci numărul lor este $q^{n-q}(q-1)$.

. . . . **2 puncte**

Întrucât numărul polinoamelor de grad n din $K[X]$ este $q^n(q-1)$, rezultă că numărul funcţiilor polinomiale ataşate polinoamelor de grad n este

$$\frac{q^n(q-1)}{q^{n-q}(q-1)} = q^q,$$

adică exact numărul funcţiilor de la K în K.

. . . . **3 puncte**

Cum numărul funcţiilor de la K în K^* este $(q-1)^q$, rezultă că numărul polinoamelor de grad n, care nu au nicio rădăcină în K, este $(q-1)^q \cdot (q-1)q^{n-q} = (q-1)^{q+1}q^{n-q}$. Deci probabilitatea cerută este

$$\frac{(q-1)^{q+1}q^{n-q}}{q^n(q-1)} = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^q.$$

. . . . **2 puncte**